Herleitung von $W_{ges} = m\,c^2$

Vorbemerkung:

Die klassische kinetische Energie wurde wie folgt hergeleitet:

$$W_{kin} = \int_{s_1}^{s_2} F\,ds = \int_{s_1}^{s_2} m\,a\,ds = m\int_{s_1}^{s_2} \frac{dv}{dt}\,ds = m\int_0^v v\,dv = m[\frac{1}{2}v^2]_o^v = \frac{1}{2}m\,v^2 \quad .$$

Sie ist relativistisch nicht mehr haltbar.

Zur Berechnung der relativistischen kinetischen Energie stelle ich zunächst den folgenden Zusammenhang bereit:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d(mv)}{dv}\frac{dv}{dt} \quad und\; ds = v\,dt \quad .$$

Damit folgt

$$W_{kin} = \int_{s_1}^{s_2} F\,ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(m\,v)}{dv}\frac{dv}{dt}v\,dt = \int_0^v \frac{d(mv)}{dv}v\,dv \quad .$$

Nach partieller Integration folgt:

$$W_{kin} = [m\,v^2]_0^v - \int_0^v mv\,dv \quad .$$

Ersetzt man nun m durch $\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$,

ergibt sich

$$W_{kin} = m\,v^2 - m_0\int_0^v \frac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,dv = m\,v^2 - m_0\,c\int_0^v \frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}}\,dv = m\,v^2 - m_0\,c[-\sqrt{c^2-v^2}]_0^v =$$

$$m\,v^2 + m_0\,c(\sqrt{c^2-v^2}-c) = m\,v^2 + m_0\,c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_0\,c^2 =$$

$$m\,v^2 + m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_0\,c^2 = m(v^2+c^2(1-\frac{v^2}{c^2})) - m_0\,c^2 = m(v^2+c^2-v^2) - m_0\,c^2 =$$

$$mc^2 - m_0\,c^2 \quad .$$

Interpretiert man m_0c^2 als Ruheenergie, ergibt sich für die Gesamtenergie

$W_{ges} = m\,c^2$.